Option informatique 2^e année

Lycée Louis-le-Grand, Paris

20 décembre 2000

1 Exercice de logique

Dans une île vivent trois espèces d'habitants : *les Purs* disent toujours la vérité, *les Pires* mentent toujours, *les Versatiles* disent de temps en temps la vérité ou mentent parfois selon leur fantaisie. Deux habitants font les déclarations suivantes : A dit que "B est un Pur" et B assure que "A n'est pas un Pur". On considère les propositions suivantes : $AV =$ "A est un Pur", $AF =$ "A est un Pire", $BV =$ "B est un Pur", $BF =$ "B est un Pire".

Question 1
Exprimer l'énoncé dans le formalisme du calcul des propositions en utilisant les connecteurs logiques $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\neg$.

Question 2
Exprimer l'énoncé dans le formalisme du calcul des propositions en utilisant uniquement les connecteurs logiques $\vee$, $\wedge$, $\neg$.

Question 3
Exprimer la conjonction des deux affirmations sous forme d'une disjonction de conjonctions de littéraux (par exemple sous forme normale disjonctive) et en déduire toutes les solutions possibles en bon français.

Question 4
Montrer que l'un des deux habitants a dit la vérité sans pour autant être un Pur.

2 Problème sur les langages rationnels

$\mathcal{A}$ désigne ici un *alphabet* fini, dont les éléments seront appelés des *caractères*. On notera $\mathcal{A}^\star$ l'ensemble des *mots* finis muni de la concaténation des mots. $\mathcal{A}^+$ désigne les mots de taille non nulle. La *taille* (ou *longueur*) d'un mot u est notée $|u|$. Si $c \in \mathcal{A}$, $|u|_c$ dénote le nombre d'occurrences du caractère c dans le mot u. On confond les mots de taille 1 et les caractères.
Un *sous-mot* d'un mot $u = u_1 \dots u_n$ est un mot de la forme $u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_p}$ où on a choisi les indices i_j de sorte que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n$.
Un *facteur* d'un mot u est un mot v tel qu'il existe deux mots x et y (éventuellement vides) vérifiant $u = xvy$. Un *facteur gauche* (*resp. un facteur droit*) d'un mot u est un mot v tel qu'il existe un mot x (éventuellement vide) vérifiant $u = vx$ (*resp.* $u = xv$). Les facteurs gauches sont donc les préfixes, les facteurs droits les suffixes.
On note $\mathrm{Rat}(\mathcal{A})$ (ou simplement Rat s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'ensemble des langages *rationnels* sur $\mathcal{A}$.

2.1 Morphismes

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux alphabets finis. Un *morphisme* de $\mathcal{A}^\star$ dans $\mathcal{B}^\star$ est une application φ qui vérifie la relation $\varphi(u.v) = \varphi(u).\varphi(v)$ pour tous mots u et v sur $\mathcal{A}$. On note $\mathrm{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (ou tout simplement Mor s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'ensemble de ces morphismes.

Question 5
Que vaut $\varphi(\varepsilon)$ quand $\varphi \in \mathrm{Mor}$?

Question 6
Montrer qu'un morphisme φ est entièrement déterminé par les images $\varphi(c)$ des caractères de l'alphabet $\mathcal{A}$.

Question 7
Soit, par exemple, et pour cette question seulement, $\varphi : \{a,b\}^\star \longrightarrow \{b,c,d\}^\star$ le morphisme défini par $\varphi(a) = bbc$ et $\varphi(b) = cdb$.
Calculer $\varphi(abaab)$.

Dans la suite, on revient au cas général.

Si $\varphi \in \mathrm{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, si L est un langage sur $\mathcal{A}$, $\varphi(L)$ désigne l'ensemble $\varphi(L) = \{\varphi(u), u \in L\}$.
Inversement, si M est un langage sur $\mathcal{B}$, $\varphi^{-1}(M)$ désigne l'ensemble $\varphi^{-1}(M) = \{u \in \mathcal{A}^\star, \varphi(u) \in M\}$.

Question 8
On suppose que (Q, q_0, F, δ) est un automate fini déterministe complet sur l'alphabet $\mathcal{B}$: q_0 est l'état initial, F l'ensemble des états finals, et $\delta : Q \times \mathcal{B} \longrightarrow Q$ décrit les transitions de l'automate. On note M le langage rationnel qu'il reconnaît.
Décrire un automate fini qui reconnaisse $\varphi^{-1}(M)$.
On en déduira que l'image réciproque d'un langage rationnel par un morphisme est encore rationnelle.

Question 9
Montrer de même que l'image directe $\varphi(L)$ d'un langage rationnel L sur $\mathcal{A}$ par un morphisme est encore rationnel.
(Pour cela, on pourra introduire la taille maximale n des images par φ des caractères : c'est-à-dire $n = \max_{c \in \mathcal{A}} |\varphi(c)|$; et utiliser comme nouvel ensemble d'états : $Q' = Q \times \{0, 1, \ldots, n-1\} \times (\mathcal{A} \cup \{*\})$ où $*$ est une nouvelle lettre.)

On en déduit que l'image directe d'un langage rationnel par un morphisme est encore rationnelle.

2.2 Exemples d'applications

Question 10
Soit, pour cette question, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \{a, b\}$. On considère $\varphi \in \mathrm{Mor}$ défini par $\varphi(a) = aab$ et $\varphi(b) = abb$.
Le langage $L = \{u \in \{a,b\}^\star, |u|_a = |u|_b\} \setminus (\mathcal{A}^\star.\{aaa, bbb\}.\mathcal{A}^\star)$ est-il rationnel ?

Question 11
Rappeler la construction d'un automate qui reconnaît l'intersection de deux langages rationnels pour lesquels on fournit des automates finis déterministes complets.

On en déduit que si $(\varphi, \psi) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{B})^2$, si $K \in \mathrm{Rat}(\mathcal{A})$, et si $L \in \mathrm{Rat}(\mathcal{B})$, alors $M = \varphi(K \cap \psi^{-1}(L))$ est également rationnel (sur l'alphabet $\mathcal{B}$).

On considère ici le cas où $\mathcal{B} = \{a, b\}$, et où $\mathcal{A} = \{a, b, \bar{a}, \bar{b}\}$.

Question 12
En utilisant les morphismes définis par $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$ et $\varphi(\bar{a}) = \varphi(\bar{b}) = \varepsilon$ d'une part, et $\psi(a) = \psi(\bar{a}) = a$, $\psi(b) = \psi(\bar{b}) = b$ d'autre part, et en choisissant intelligemment le langage K, montrer que si le langage L est rationnel, l'ensemble de ses sous-mots, l'ensemble de ses facteurs, l'ensemble de ses facteurs gauches, l'ensemble de ses facteurs droits sont tous les quatre rationnels.

Question 13
Montrer de façon analogue que si L est un langage rationnel sur $\{a, b\}$, l'ensemble M des mots obtenus en supprimant le facteur ab, c'est-à-dire $M = \{uv, uabv \in L\}$, est également un langage rationnel.

2.3 Mots sans carrés

Soit $\mathcal{A} = \{a, b\}$ et $\mathcal{B} = \{a, b, c\}$. On considère le morphisme θ de $\mathcal{A}^\star$ dans $\mathcal{A}^\star$ défini par $\theta(a) = ab$ et $\theta(b) = ba$ et le morphisme μ de $\mathcal{B}^\star$ dans $\mathcal{B}^\star$ défini par $\mu(a) = abc$, $\mu(b) = ac$, $\mu(c) = b$.

Question 14
Montrer que tout mot w de longueur supérieur ou égal à 4 sur l'alphabet $\mathcal{A}$ contient un facteur carré (c'est à dire qu'il existe $u \in \mathcal{A}^+$ tel que $w \in \mathcal{A}^\star uu\mathcal{A}^\star$).
On définit les *mots de Thue-Morse T_n sur l'alphabet $\mathcal{A}$* par $T_0 = a$ et $\forall n \geq 1$, $T_n = \theta(T_{n-1})$.

Question 15
Calculer T_1, T_2, T_3, T_4.
Quelle est la longueur de T_n ? Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un préfixe de T_{n+1}.

Question 16
Écrire une fonction Caml qui retourne le mot T_n sous forme d'une liste de caractères.

Question 17
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \in \mathcal{A}^\star \setminus (\mathcal{A}^\star.\{aaa, bbb\}.\mathcal{A}^\star)$.

Question 18
Soit $u \in \mathcal{A}^+$ et $v \in \mathcal{A}^\star$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \notin \mathcal{A}^\star uvuvu\mathcal{A}^\star$ (autrement dit : un mot de Thue-Morse ne contient aucun cube uuu ni aucun facteur de la forme $uvuvu$).
On pourra raisonner par l'absurde en considérant un tel facteur de longueur minimale apparaissant pour la première fois à la position p dans un T_n, et donc dans tous les suivants, et procéder de la manière suivante :
a) Montrer que $|uvuvu| \geq 5$.
b) En déduire que uvu contient soit aa soit bb.
c) En déduire que $|uv|$ est pair.
d) Soit u' le mot formé par les lettres de u qui ont une position paire dans T_n et v' le mot formé par les lettres de u qui ont une position paire dans T_n. Montrer que le mot $u'v'u'v'u'$ est un facteur de T_n et trouver une contradiction.

On définit les mots U_n sur l'alphabet $\mathcal{B}$ par $U_0 = a$ et $\forall n \geq 1$, $U_n = \mu(U_{n-1})$.

Question 19
Calculer U_1, U_2, U_3, U_4. Quelle est la longueur de U_n ?
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est un préfixe de U_{n+1}.

Question 20
Montrer que tous les mots U_n sont sans facteur carré.
Pour cela on pourra considérer le morphisme π de $\mathcal{B}^\star$ dans $\mathcal{A}^\star$ défini par $\pi(a) = abb$, $\pi(b) = ab$ et $\pi(c) = a$ et remarquer que $\theta \circ \pi = \pi \circ \mu$.

Question 21
Soit $L = \{udv \in \{a, b, c, d\}^* \mid u \neq v$ ou u contient un carré$\}$. Montrer que L n'est pas rationnel.
Aurait-on pu montrer ce résultat en appliquant le lemme de pompage (ou lemme de l'étoile) ?